VI Congreso de la

Pequeña y Mediana Empresa

LA PROGRAMACION DE LA PRODUCCION EN CONDICIONES DE INCERTIDUMBRE

Area 3: Las PyME como organización

3.4 La información y la tecnología en las PyME competitivas

Luisa L. Lazzari - Patricia I. Mouliá

Docentes e Investigadoras

Facultad de Ciencias Económicas

Universidad de Buenos Aires

Buenos Aires – septiembre de 2000

Indice

1. Introducción

2. La programación lineal

3. Modelo de programación lineal borrosa con restricciones borrosas

4. Un problema de programación de producción en condiciones de incertidumbre

5. Conclusión

6. Bibliografía

La programación de la producción en condiciones de incertidumbre

"En la medida en que las leyes de las matemáticas se refieren a la realidad, no son ciertas. Y en la medida en que son ciertas, no se refieren a la realidad"

Albert Einstein, *Geometry and Experience*

1. Introducción

El hombre, en la búsqueda de la precisión, ha intentado ajustar el mundo real a modelos matemáticos rígidos y estáticos. Una metodología útil para plantear y resolver ciertos problemas en condiciones de incertidumbre es la teoría de los conjuntos borrosos o *fuzzy sets*. El nacimiento de esta teoría se debió a la necesidad de disponer de alguna representación matemática de familias de objetos usuales que, con la teoría clásica de conjuntos no podían ser representados adecuadamente.

Los conjuntos borrosos o difusos (*fuzzy sets*) nacieron con este nombre en 1965, a partir del artículo del profesor de Ingeniería Electrónica de la Universidad de California en Berkeley, y fundador de la teoría, Lofti A. Zadeh. En los primeros 25 años de existencia de la teoría hubo una gran producción de trabajos teóricos y aplicados, y de productos para el mercado (los que dieron lugar a la llamada *ingeniería fuzzy*). Esto fue el resultado de la cooperación entre ingenieros y científicos, puros y aplicados, y al hecho de que varias empresas, especialmente en Japón, tomaron la decisión de incorporar la naciente teoría a sus grupos de investigación, innovación y desarrollo. En un determinado universo *X*, un *subconjunto borroso* $\tilde{A}$ es una función $\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0,1]$ que asigna a cada elemento del conjunto *X* un valor $\mu_{\tilde{A}}(x)$ perteneciente al intervalo [0,1], llamado el grado de pertenencia de *x* a $\tilde{A}$. Si bien las funciones características de los conjuntos clásicos o las medidas de probabilidad podrían encuadrarse perfectamente en esta definición, el interés de la teoría de los conjuntos borrosos se centra esencialmente en modelizar aquellos problemas donde el marco conjuntista o probabilístico resulta insuficiente o no adecuado.

Mediante el empleo de los conjuntos *fuzzy* se busca describir y formalizar la realidad utilizando modelos flexibles que interpreten las leyes que rigen el comportamiento humano y las relaciones entre los hombres. El concepto de conjunto borroso surge de romper la dicotomía "pertenece – no pertenece" de la teoría de conjuntos clásica, a la cual incluye como caso particular. Permite construir una estructura matemática con la cual es posible manipular datos inciertos o vagos, para los cuales la pertenencia a un conjunto tiene grados. De este modo la pertenencia deja de ser abrupta para ser graduada. El cálculo de Zadeh abrió un camino para representar el razonamiento con predicados vagos, un tipo de cálculo que contiene, como caso particular, el cálculo con predicados nítidos que definen conjuntos clásicos. El cálculo lógico clásico queda englobado en el cálculo lógico borroso, y la nitidez o precisión aparece como un caso límite de la vaguedad o imprecisión.

En general, un problema de decisión se dice que es *borroso (fuzzy)*, o que es un problema de decisión en ambiente *fuzzy*, si al menos uno de los elementos que lo caracterizan está dado por un conjunto o relación *fuzzy*.

La programación matemática es una de las áreas en las cuales la teoría de los conjuntos borrosos ha sido aplicada extensamente. Inicialmente basados en el modelo de decisión en un ambiente incierto de Bellman y Zadeh, los diferentes modelos han sido propuestos para permitir flexibilidad en las restricciones y borrosidad en la función objetivo, ya sea en la programación lineal y no lineal clásicas, tanto como en la programación lineal entera y fraccionaria, así como en la programación dinámica.

La programación lineal borrosa ofrece una serie de caminos a tener en cuenta para todo tipo de vaguedad. En este trabajo analizaremos su aplicación al planteo y resolución de problemas de programación de la producción cuando los recursos disponibles no son conocidos con exactitud.

En la sección 2 haremos una revisión de los problemas de programación lineal clásicos, en la sección 3 plantearemos un modelo de programación lineal borroso, y por último daremos un ejemplo de un problema de programación de producción en condiciones de incertidumbre que corresponde al modelo planteado.

2. La programación lineal

Consideremos el problema clásico de *programación lineal* (PL): “maximizar una función objetivo sujeta a restricciones”, es decir

$$\text{maximizar} \quad z = cx$$

$$\text{sujeto a} \quad \begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Donde *c* y *x* son vectores de dimensión *n*, *b* es un vector de dimensión *m* y *A* es una matriz de tipo *mxn*, *x* determina las variables de decisión, *A*, *b* y *c* describen los estados y *z* es la función de utilidad (función objetivo) que se desea maximizar, donde los coeficientes de *A*, *b* y *c* son números nítidos.

En un entorno incierto, el decisor puede querer alcanzar ciertos niveles de aspiración que no es posible definir nítidamente, como así también las restricciones pueden no ser tomadas en el sentido matemático estricto, sino admitir pequeños desvíos. En consecuencia, diferentes elementos de las ecuaciones propuestas pueden ser borrosos, y la borrosidad puede expresarse en formas diferentes: los elementos de *A*, *b* o *c* pueden ser números borrosos en lugar de nítidos, las restricciones pueden ser representadas por subconjuntos borrosos en lugar de inecuaciones o ecuaciones y la función objetivo por un subconjunto borroso o bien por una función borrosa.

Finalmente, la solución puede ser un subconjunto borroso o una solución nítida (solución máxima), lo que en todos los casos aporta información para la toma de decisión. A diferencia de la PL clásica, el tipo de modelo de la programación lineal borrosa no es único y su elección depende de los diferentes aspectos que presente la situación que se quiere modelizar.

3. Modelo de programación lineal borrosa con restricciones borrosas

Cuando los recursos disponibles no son conocidos con precisión el conjunto factible resulta borroso. En tal situación, para cada recurso se considera una cantidad deseable *b,* pero se acepta la posibilidad de que supere a *b* hasta un tope máximo *b+p* (*p* es el denominado nivel de tolerancia). Luego, las restricciones que definen el espacio solución pueden ser expresadas mediante subconjuntos borrosos. Un modelo que incluye las restricciones con estas características se presenta de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & z = cx \\ \text{sujeto a} & \begin{cases} Ax \,\tilde{\leq}\, b \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array} \qquad \text{(I)}$$

El símbolo “ $\tilde{\leq}$ ” indica una relación de tipo “≤” en un ambiente borroso.

Cada una de las filas de la matriz *A*, estará ahora representada por un subconjunto borroso, cuyas funciones de pertenencia serán $\mu_i(x)$, que pueden interpretarse como el grado para el cual *x* satisface la desigualdad borrosa $(Ax)_i \leq$

$m(\ )$. Su valor será cero si las restricciones son

monótonamente de cero a uno, esto es:

$$m_i(x) = \begin{cases} 1 & si \quad (Ax)_i \leq b_i \\ \in [0,1] & si \quad b_i < (Ax)_i \leq b_i + p_i \\ 0 & si \quad (Ax)_i > b_i + p_i \end{cases} \qquad i = 1, 2, ..., m$$

Siendo p_i las constantes que representan la transgresión admisible de cada restricción, y pueden ser determinadas en forma subjetiva.

Según el enfoque de Verdegay (10), si se considera una función de pertenencia lineal (continua y monótona) que varía en el intervalo de tolerancia $[b_i, b_i + p_i]$, como la siguiente:

$$m_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (Ax)_i \leq b_i \\ 1\text{-} \dfrac{(Ax)_i - b_i}{p_i} & \text{si} \quad b_i < (Ax)_i \leq b_i + p_i \\ 0 & \text{si} \quad (Ax)_i > b_i + p_i \end{cases} \qquad i = 1, 2, ..., m \qquad \text{(II)}$$

Gráficamente:

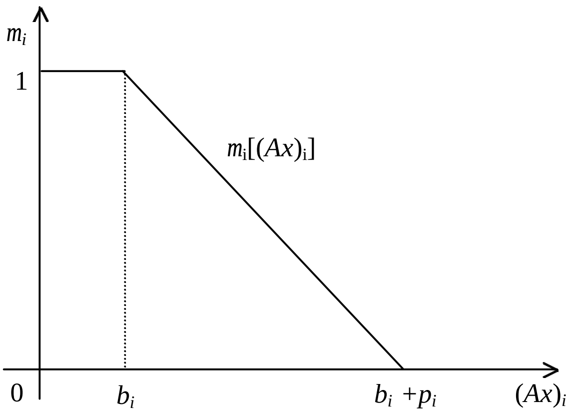

Gráfico 1

La ecuación (I) resulta equivalente a

$$\begin{aligned} &\max \quad cx \\ &\text{s. a.} \quad x \in X_\alpha \qquad \text{(III)} \end{aligned}$$

Donde $X_\alpha = \{x \ / \ m_i(x) \geq \alpha, \ \forall i \ \ x \geq 0 \}$ para cada α perteneciente al intervalo [0,1] se denomina α-*corte* (ver 5, 7).

Utilizando la definición de los α-*cortes*, (III) se puede expresar del siguiente modo:

$$
\begin{array}{ll}
\max & cx \\
\text{s.a.} & \mu_i(x) \geq \alpha \\
 & x \geq 0,\ \alpha \in [0,1]
\end{array}
\qquad \text{(IV)}
$$

Sustituyendo las funciones de pertenencia (II) en (IV), obtenemos:

$$
\begin{array}{ll}
\max & cx \\
\text{s. a.} & (Ax)_i \leq b_i + (1-\alpha)p_i \quad \forall i \\
 & x \geq 0, \alpha \in [0,1]
\end{array}
\qquad \text{(V)}
$$

Reemplazando (1 - α) = θ en (V), resulta el siguiente problema clásico de programación lineal paramétrica:

$$
\begin{array}{ll}
\max & cx \\
\text{s. a.} & (Ax)_i \leq b_i + \theta p_i \quad \forall i \\
 & x \geq 0, \text{el parámetro } \theta \in [0,1]
\end{array}
$$

De este modo, para cada α se obtiene una solución óptima. Para ilustrar este enfoque consideraremos el siguiente problema de programación de producción planteado en (6).

4. Un problema de programación de producción en condiciones de incertidumbre

La compañía Knox Mix tiene la opción de emplear uno o más de cuatro tipos diferentes de procesos de producción. El primero y segundo proceso producen artículos del producto *A*, y el tercero y cuarto proceso producen artículos del producto *B*. Los insumos para cada proceso son: mano de obra medida en semanas-hombre, libras de material *Y* y cajas de material *Z*. Como cada proceso varía en sus requerimientos de insumos, las rentabilidades de los procesos difieren, incluso para procesos que fabrican el mismo artículo. La decisión del productor sobre el programa de producción semanal está limitada a las cantidades disponibles de mano de obra y de ambos tipos de materias primas, el objetivo es buscar aquella que maximice el beneficio. En la ***Tabla 1*** se expresan las restricciones completas de tecnología y de insumos.

Tabla 1

Artículo	Semanas-Hombre	Material Y (libras)	Material Z (cajas)	Beneficio unitario
Un artículo de producto A				
Proceso 1	1	7	3	4
Proceso 2	1	5	5	5
Un artículo de producto B				
Proceso 1	1	3	10	9
Proceso 2	1	2	15	11
Total disponible	15	120	100	maximizar

Si se considera que x_1 , x_2 , x_3 y x_4 son los niveles de producción para los procesos 1, 2, 3 y 4 respectivamente; puede formularse el siguiente problema de programación lineal:

$$\max \quad z = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \qquad \text{(beneficio)}$$

s.a.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \leq & 15 \\
7x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & \leq & 120 \\
3x_1 & + & 5x_2 & + & 10x_3 & + & 15x_4 & \leq & 100 \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3, \; x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

Resolviendo este problema de programación lineal clásico mediante el método simplex, la tabla final es:

Tabla 2

Variable básica	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	Constantes
x_1	1	$\frac{5}{7}$	0	$-\frac{5}{7}$	$\frac{10}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{50}{7}$
s_2	0	$-\frac{6}{7}$	0	$\frac{13}{7}$	$-\frac{61}{7}$	1	$\frac{4}{7}$	$\frac{325}{7}$
x_3	0	$\frac{2}{7}$	1	$\frac{12}{7}$	$-\frac{3}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{55}{7}$
z_j - c_j	0	$\frac{3}{7}$	0	$\frac{11}{7}$	$\frac{13}{7}$	0	$\frac{5}{7}$	$\frac{695}{7}$

La solución óptima es $x^* = \left(\frac{50}{7}, 0, \frac{55}{7}, 0\right)$ o bien $x^* = (7.14, 0, 7.86, 0)$ y el beneficio máximo es $z^* = \$\frac{695}{7}$, o $z^* = \$99.29$. Los recursos utilizados son 15, 73.57 y 100 unidades de mano de obra, material *Y* y material *Z* respectivamente.

Si se considera que las disponibilidades máximas de los recursos de mano de obra y de material *Z*, no se pueden precisar con exactitud y sus tolerancias máximas son p_1 = 3 y p_2 = 20 unidades respectivamente, el problema anterior se convierte en un problema de programación lineal con restricciones borrosas. Para su resolución, se determinan las funciones de pertenencia correspondientes a las restricciones borrosas.

i) $$m_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad g_1(x) < 15 \\ 1 - \frac{[g_1(x) - 15]}{3} & \text{si} \quad 15 \le g_1(x) \le 18 \\ 0 & \text{si} \quad g_1(x) > 18 \end{cases} \qquad \text{para} \quad g_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

Gráficamente:

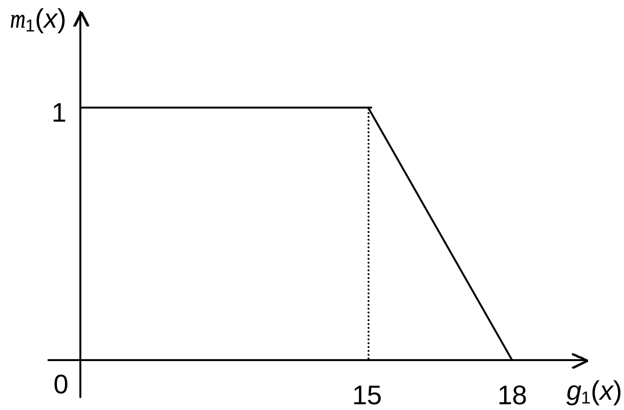

Gráfico 2

ii) $$m_3(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad g_3(x) < 100 \\ 1 - \frac{[g_3(x) - 100]}{20} & \text{si} \quad 100 \le g_3(x) \le 120 \\ 0 & \text{si} \quad g_3(x) > 120 \end{cases} \qquad \text{para} \quad g_3(x) = 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4$$

Gráficamente:

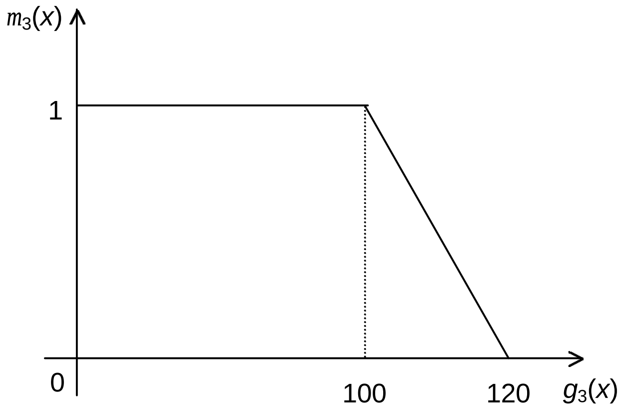

Gráfico 3

Aplicando el enfoque de Verdegay (desarrollado en 3), el problema consiste en:

$$\max \quad z = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \qquad \text{(beneficio)}$$

$$\text{s.a.} \qquad m_1(x) \geq \alpha$$

$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 120$$

$$m_3(x) \geq \alpha$$

$$\alpha \in [0, 1], \; x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

o bien,

$$\max \quad z = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \qquad \text{(beneficio)}$$

$$\text{s.a} \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15 + 3(1 - \alpha)$$

$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 120$$

$$3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100 + 20(1 - \alpha)$$

$$\alpha \in [0, 1], \; x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Considerando el parámetro $\theta = 1 - \alpha$ se obtiene el siguiente problema de programación lineal paramétrica:

$$\max \quad z = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \qquad \text{(beneficio)}$$

$$\text{s.a} \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15 + 3\theta$$

$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 120$$

$$3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100 + 20\theta$$

$$\theta \in [0, 1], \; x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Considerando los valores de la ***Tabla 2***, final del simplex del problema clásico, y utilizando la técnica paramétrica se obtienen los siguientes valores para la columna de constantes de la tabla simplex final, ***Tabla 3***, correspondiente al problema de programación lineal paramétrica planteado:

$$\left(\frac{10}{7}, 0, -\frac{1}{7}\right)\begin{pmatrix} 3\theta \\ 0 \\ 20\theta \end{pmatrix} = \frac{10\,\theta}{7}$$

$$\left(-\frac{61}{7}, 1, \frac{4}{7}\right)\begin{pmatrix} 3\theta \\ 0 \\ 20\theta \end{pmatrix} = -\frac{103\,\theta}{7}$$

$$\left(-\frac{3}{7}, 0, \frac{1}{7}\right)\begin{pmatrix} 3\theta \\ 0 \\ 20\theta \end{pmatrix} = \frac{11\theta}{7}$$

Tabla 3

Variable básica	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	Constantes
x_1	1	$\frac{5}{7}$	0	$-\frac{5}{7}$	$\frac{10}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{50}{7}+\frac{10\,\theta}{7}$
s_2	0	$-\frac{6}{7}$	0	$\frac{13}{7}$	$-\frac{61}{7}$	1	$\frac{4}{7}$	$\frac{325}{7}-\frac{103\,\theta}{7}$
x_3	0	$\frac{2}{7}$	1	$\frac{12}{7}$	$-\frac{3}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{55}{7}+\frac{11\theta}{7}$
z_j - c_j	0	$\frac{3}{7}$	0	$\frac{11}{7}$	$\frac{13}{7}$	0	$\frac{5}{7}$	$\frac{695}{7}+\frac{139\,\theta}{7}$

En consecuencia, la solución óptima puede expresarse como $x^* = (7.14 + 1.43\,\theta\,,\,0\,,\,7.86 + 1.57\,\theta\,,\,0)$ y $z^* = \$\,(99.29 + 19.86\,\theta)$, para $\theta \in [0{,}1]$. Como se observa, y de acuerdo a lo ya visto sobre el enfoque de Verdegay, existe una solución óptima para cada valor del parámetro θ. La ***Tabla 4*** muestra el beneficio que se obtiene, así como también la cantidad utilizada de los recursos disponibles para diferentes valores del parámetro $\theta \in [0{,}1]$, con el fin de proporcionar al decisor una información más completa para la toma de decisiones.

Tabla 4

		Recursos utilizados		
Parámetro *q*	**Beneficio máximo**	**Semanas-hombre**	**Material Y**	**Material Z**
0.0	99.29	15.00	73.57	100.00
0.1	101.28	15.30	75.04	102.00
0.2	103.27	15.60	76.51	104.00
0.3	105.26	15.90	77.98	106.00
0.4	107.25	16.20	79.45	108.00
0.5	109.24	16.50	80.92	110.00
0.6	111.23	16.80	82.39	112.00
0.7	113.22	17.10	83.86	114.00
0.8	115.21	17.40	85.33	116.00
0.9	117.20	17.70	86.80	118.00
1.0	119.19	18.00	88.27	120.00

5. Conclusión

Existen varios métodos de solución para el modelo presentado en la sección anterior. Las diferencias entre ellos se deben a la forma de representar a los parámetros borrosos o al procedimiento mismo.

La forma de razonar en términos absolutos de “cierto” o “falso” de origen aristotélico, no se adecua en la actualidad en numerosas situaciones, necesitamos aplicar una lógica borrosa capaz de captar los matices del mundo real, donde nada es absolutamente blanco o negro, sino que todo es cuestión de grados. Los conjuntos borrosos facilitan la modelización de situaciones relacionales que presentan vaguedad de forma intrínseca, es decir que cualquier intento de hacer exactos los elementos utilizados lleva a una simplificación que cambia los términos en los que se plantean los problemas o conduce a soluciones no reales.

El problema desarrollado muestra un ejemplo de la posibilidad de programar la producción cuando no se conocen exactamente los recursos disponibles, mediante el empleo de técnicas actuales como es el caso de la programación lineal *fuzzy*, logrando de este modo aprovechar mejor los recursos disponibles, potenciando la capacidad productiva de la empresa.

6. Bibliografía

(1) Basile, D. (1998): *Desarrollo de proyectos de emprendimientos PyMEs para el crecimiento*. Ediciones Macchi, Buenos Aires.

(2) Bellman, R. E. y Zadeh L. A. (1970): "Decision-making in a fuzzy environment", *Management Science* Vol. 17 N° 4.

(3) Dorfman, R.; Samuelson, P. A. y Solow, R. M. (1964): *Programación Lineal y Análisis Económico*, Segunda edición, Aguilar ediciones, Madrid.

(4) Dubois, D. y Prade, H. (1980): *Fuzzy Sets and Systems – Theory and Applications*, Academic Press, New York.

(5) Klir, J. y Yuan, B. (1995): *Fuzzy sets and fuzzy logic*, Cap. 15, Prentice Hall, New Jersey.

(6) Lai, Y. J. y Hwang, Ch. L. (1992): *Fuzzy Mathematical Programming, methods and applications*, Springer-Verlag, Berlin.

(7) Lazzari, L., Machado, E. y Pérez, R. (1998): *Teoría de la decisión fuzzy*, Ediciones Macchi, Buenos Aires.

(8) Lazzari, L. y Mouliá, P. (1999): Programación Lineal en condiciones de incertidumbre, en *Actas de las XIV Jornadas de Matemática de Facultades de Ciencias Económicas y Afines*. Santa Fe.

(9) Tow, V. (1999): *Programación lineal como instrumento de modelado microeconómico*. Cuadernos Universitarios Macchi Nº 2. Ediciones Macchi, Buenos Aires.

(10) Verdegay, J.L. (1982): "Fuzzy Mathematical Programming" en Gupta, M.M. y E. Sánchez (eds). *Aproximate Reasoning in Decision Analysis*, North – Holland, Amsterdam.

(11) Verdegay, J.L. (1995): "Fuzzy optimization: Models, Methods and Perspectives", *Actas del 6th IFSA-95, World Congress,* San Pablo, Brasil., pp.39-71.

(12) Zadeh, L. A.(1965): "Fuzzy sets", *Information and Control* 8, pp. 338-353.

(13) Zimmermann, H. (1993): "Applications of *Fuzzy* Theory to mathematical Programming", en Dubois, D., Prade, H. Y Yager, R. (Eds.): *Fuzzy Sets for Intelligent Systems*, pp. 795-809, Morgan Kaufmann Publishers, California.